Wichtige Matheformeln

R. Heydenreich

13. Februar 2001

Inhaltsverzeichnis

1 Finanzmathematik **2**
- 1.1 Rentenrechnung . . . 2
- 1.2 Tilgungsrechnung . . . 4
  - 1.2.1 Ratentilgung . . . 4
  - 1.2.2 Annuitätentilgung . . . 4
  - 1.2.3 Prozentannuitäten . . . 5
- 1.3 Zinsrechnung . . . 5
  - 1.3.1 Verzinsung mit unterschiedlichen Zinssätzen . . . 5
  - 1.3.2 mittlerer Zahlungstermin . . . 6
  - 1.3.3 Effektiver Jahreszins . . . 6
  - 1.3.4 Wechselgeschäft . . . 7
  - 1.3.5 Skonto . . . 7

2 Analysis **8**
- 2.1 Anwendungen der Integralrechnung . . . 8
- 2.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . 10
  - 2.2.1 allgemeine Vorgehensweise . . . 10
  - 2.2.2 Beispiel . . . 11
- 2.3 Fourierreihenentwicklung . . . 12
- 2.4 Grenzwerte . . . 14
  - 2.4.1 verschiedene Grenzwerte . . . 14
  - 2.4.2 l' Hospitalsche Regeln . . . 15
- 2.5 Bernouillesche Ungleichung . . . 15
- 2.6 Mengenalgebra . . . 15

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung **17**
- 3.1 Additionssatz . . . 17
- 3.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit . . . 17
- 3.3 Multiplikationssatz . . . 17
- 3.4 Totale Wahrscheinlichkeit . . . 18
- 3.5 Formel von Bayes . . . 18

4 Wirtschaftsmathematik **19**
- 4.1 Elastizitäten . . . 21
- 4.2 Extremwerte für mehrdimensionale Funktionen . . . 21
- 4.3 Anwendungen der Integralrechnung . . . 22
- 4.4 wichtige Funktionen des TI-89 . . . 22

Kapitel 1

Finanzmathematik

1.1 Rentenrechnung

wichtiger Hinweis:

Verwendung von	bei
i	Zinsperiode = Zahlungsperiode
$i^* = \frac{i}{m}$	Zinsperiode > Zahlungsperiode
$i^*_{eff} = (1 + \frac{i}{m})^k - 1$	Zinsperiode < Zahlungsperiode

m ... Anzahl der Zahlungsperioden pro Zinsperiode
k ... Anzahl Verzinsungen pro Jahr

- Zinsperiode > Zahlungsperiode
  $i \to i^* = \frac{i}{m} \curvearrowright q^* = 1 + i^*$

  $n \to nk$

  i^* ... Zinssatz pro Zinsperiode
  k ... Anzahl Zinsperioden pro $[n]$ (Einheit von n, meist 1 Jahr)
  m ... Anzahl der Zahlungsperioden pro Zinsperiode

$$R_n^v = r(m + \frac{m+1}{2}i^*)\frac{q^{*kn} - 1}{q^* - 1} \qquad R_n^n = r(m + \frac{m-1}{2}i^*)\frac{q^{*kn} - 1}{q^* - 1}$$

- Zinsperiode < Zahlungsperiode

$$i^*_{eff} = (1 + \frac{i}{m})^k - 1, \qquad q^*_{eff} = (1 + \frac{i}{m})^k - 1 = (1 + i^*)^k$$

$$R_n^v = r q^*_{eff}\frac{q^{*kn}_{eff} - 1}{q^*_{eff} - 1} \qquad R_n^n = r\frac{q^{*kn}_{eff} - 1}{q^*_{eff} - 1}$$

k ... Anzahl Zinsperioden pro $[n]$ (Einheit von n, meist 1 Jahr), bezogen auf $i^*_{eff} \rightarrow$ Anpassung an Zinsperiode; wie oft ist der Zinsfaktor anzuwenden? z. B. $\frac{1}{4}$jährl. Verzinsung, $\frac{1}{4}$jährl. Zinssatz, jährl. Zahlung $\curvearrowright i^*_{eff}$ wird auf ein Jahr bezogen $\curvearrowright k$=4, bei $\frac{1}{2}$jährl. Zahlung wäre i^*_{eff} auf $\frac{1}{2}$ Jahr bezogen (also k=2).

- aufgeschobene Rente

  1. nachschüssig

$$R_n^n = r \cdot \frac{q^a - 1}{q - 1} \qquad R_0^n = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^a - 1}{q - 1}$$

$$a = 1 + n - j$$

  j ... Anzahl der aufgeschobenen Jahre (z. B. 10 Jahre Rente, erste Rate im 5. Jahr $\curvearrowright a = 6$)

  2. vorschüssig

$$R_n^v = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad R_0^v = [\dots]$$

- abgebrochene Rente

  1. nachschüssig

$$R_n^n = r \cdot \frac{q^a - 1}{q - 1} \cdot q^{(n-a)} \qquad R_0^n = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^a - 1}{q - 1} \cdot \frac{1}{q^a}$$

  a ... Anzahl der gezahlten Jahre

  2. vorschüssig

$$R_n^v = [\dots] \qquad R_0^v = [\dots]$$

- unterbrochene Rente

  1. nachschüssig

$$R_n^n = R_{n_1}^n \cdot q^{n_2} + R_{n_3}^n \qquad R_0^n = [\dots]$$

  n_1 ... Anzahl der ersten gezahlten Jahre
  n_2 ... Anzahl der Jahre von da ab bis zum Schluß ($= n$)
  n_3 ... Anzahl der letzten gezahlten Jahre

  2. vorschüssig

$$R_n^v = [\dots] \qquad R_0^v = [\dots]$$

1.2 Tilgungsrechnung

Tabellenkopf für Tilgungsrechnung:

Jahr	Restschuld am Jahresanfang	Zinsbetrag	Tilgung	Annuität

1.2.1 Ratentilgung

Merkmal: konstante Tilgungsraten

- Gesamtaufwand:

$$A_{ges} = S_0 \left(1 + i \cdot \frac{n+1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} (T + Z_k) = n \cdot T + \sum_{k=1}^{n} Z_k = S_0 + Z_{ges}$$

- Gesamtzinsen:

$$Z_{ges} = \sum_{k=1}^{n} Z_k = S_0 \cdot i \cdot \frac{n+1}{2}$$

1.2.2 Annuitätentilgung

Merkmal: konstante Annuitäten

- Gesamtaufwand:

$$A_{ges} = n \cdot A$$

- Gesamtzinsen:

$$Z_{ges} = \sum_{j=1}^{n} S_0 q^{j-1} - A \cdot i \frac{q^{j-1} - 1}{q - 1}$$

- unterjährliche Annuitäten:

$$RS = SK - RK$$

n ... Anzahl Zahlungen (nicht nur die Jahre!)
A ... Annuität
RS ... Restschuld nach k Jahren
SK ... Schuldkonto nach k Jahren (aufgezinste Schuld)
RK ... Rückzahlungskonto nach k Jahren (Rentenendwert bei konstanten Zahlungen von A)

z.B. Verzinsung jährlich, Tilgung $\frac{1}{4}$jährl. nachschüssig:

$$S_k = S_0 q^k - A \left(4 + \frac{3}{2} i\right) \frac{q^k - 1}{q - 1}$$

1.2.3 Prozentannuitäten

Merkmal: konstanter Prozentsatz (Tilgung und Zins)

- Berechnung der Annuität

$$A = S_0(i+j) = i \cdot S_0 + j \cdot S_0 \curvearrowright j = \frac{A}{S_0} - i$$

- Tilgungsdauer

$$n = \frac{\ln \frac{A}{A - S_0(q-1)}}{\ln q} = \frac{\ln\left(\frac{i}{j} + 1\right)}{\ln q}$$

- Abschlußzahlung (kleiner als Annuität)

$$A_n = S_{n-1} \cdot q = S_n + A$$

- Gesamtaufwand

$$A_{ges} = A(n-1) + A_n$$

- Gesamtzinsen:

$$Z_{ges} = A_{ges} - S_0$$

i ... Zinssatz [%] ($i \cdot S_0 \rightarrow$ Zinsanteil)
j ... Tilgungssatz [%], gilt nur für das erste Jahr! ($j \cdot S_0 \rightarrow$ Tilgungsanteil)

1.3 Zinsrechnung

1.3.1 Verzinsung mit unterschiedlichen Zinssätzen

- Summe aller Zeitabschnitte

$$n = \sum_{j=1}^{n} n_j$$

- Endkapital

$$K_n = K_0 \cdot \prod_{j=1}^{l} (1 + i_j)^{n_j}$$

- Durchschnittsverzinsung ($\widehat{=}$ Rendite)

$$\bar{i} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{l} (1 + i_j)^{n_j}} - 1$$

n_j ... Länge des j-ten Zeitabschnitts (in Jahren, meist 1)
i_j ... Jahreszinssatz des i-ten Zeitabschnitts
l ... letzter Zeitabschnitt

1.3.2 mittlerer Zahlungstermin

$n \ldots$ mittlerer Zahlungstermin
$i \ldots$ Kalkulationszinssatz
$K_j \ldots$ j-te Zahlung, die zum Zeitpunkt n_j fällig ist $(j = 1 \ldots l)$
Ansatz: Summe aller Barwerte = K

$$K = \sum K_j$$

Fallunterscheidungen:

1. lineares Abzinsen
   *Merkmal:*Zahlungen alle innerhalb einer Zinsperiode

$$\sum_{a=1}^{l} \frac{K_a}{1+n_a i} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{l} K_j}{1+ni} \curvearrowright= \left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{l} K_j}{\sum\limits_{j=1}^{l} \frac{K_j}{1+n_j i}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{i}$$

2. dekursives Abzinsen
   *Merkmal:*Zahlungen alle am Ende einer Zinsperiode

$$\sum_{a=1}^{l} \frac{K_a}{(1+i)^{n_a}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{l} K_j}{(1+i)^n} \qquad \text{mit} \qquad n = \frac{\ln \frac{\sum\limits_{j=1}^{l} K_j}{\sum\limits_{j=1}^{l} \frac{K_j}{(1+i)^{n_j}}}}{\ln(1+i)}$$

   *Hinweis:*Das funktioniert nur bei $n \in \mathbb{N}$, ansonsten muß man den ganzzahligen Teil als n_1 in die exakte Formel einsetzen und n_2 bestimmen.

$$\Rightarrow \frac{\sum\limits_{j=1}^{l} K_j}{(1+i)^{n_1}(1+n_2 i)}$$

   (Umrechnung für Dezimalstellen: 1,xxx Jahre = 1 Jahr + xxx*360 Tage.)

3. gemischtes Abzinsen
   *Merkmal:*Zahlungen alle innerhalb verschiedener Zinsperioden

   - zunächst Gesamtzahlung dekursiv abzinsen,
   - dann in der exakten Nachrechnung gemischt abzinsen (volle Jahre aus Näherungslösung)

1.3.3 Effektiver Jahreszins

$$i_{eff} = (1 + \frac{i}{m})^m - 1 \qquad \text{bzw.} \qquad i_{eff} = \left(\frac{K_{n_{eff}}}{K_0} - 1 \right) \cdot \frac{1}{t}$$

wobei $t = \frac{n}{360}$ Teil einer Zinsperiode ist.
$i \ldots$ nomineller Jahreszinssatz
$m \in \mathbb{N}$

1.3.4 Wechselgeschäft

- Wechselsumme:

$$\widetilde{K}_n = \frac{\widetilde{K}_0}{1 - ni}$$

- Diskontierung:

$$\widetilde{K}_0 = \widetilde{K}_n(1 - ni) \qquad \text{mit} \qquad n = \frac{1}{i}\left(1 - \frac{\widetilde{K}_0}{\widetilde{K}_n}\right)$$

1.3.5 Skonto

$$i_{\mathit{eff}} = \frac{Z_n}{K_0 n} = \frac{iR \cdot 360}{R(100 - i) \cdot \text{Resttage}}$$

Kapitel 2

Analysis

2.1 Geometrische und technische Anwendungen der Integralrechnung

1. Fläche zwischen Kurve $y = f(x)$ und x-Achse im Intervall $[a, b]$
   Voraussetzung: $y = f(x)$ stetig in $[a, b]$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind die Nullstellen von f in $[a, b]$

$$A_x = \left| \int_a^{x_1} f(x)dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx \right| + \ldots + \left| \int_{x_n}^{b} f(x)dx \right|$$

2. Fläche zwischen zwei Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$ im Intervall $[a, b]$
   Voraussetzung: $y = f(x)$ und $y = g(x)$ stetig in $[a, b]$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind die Schnittstellen von f und g in $[a, b]$

$$A_{fg} = \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x))dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx \right| + \ldots + \left| \int_{x_n}^{b} (f(x) - g(x))dx \right|$$

3. Fläche zwischen Kurve $y = f(x)$ und y-Achse im Intervall $[a, b]$
   Voraussetzung: $y = f(x)$ stetig und eineindeutig in $[a, b]$; $y_1 = f(a)$, $y_2 = f(b)$, $y_0 = f(0)$ = Schnittpunkt mit der y-Achse, falls y_0 existiert und $y_0 \in (y_1, y_2)$

$$A_y = \left| \int_{y_1}^{y_0} x(y)dy \right| + \left| \int_{y_0}^{y_2} x(y)dy \right|$$

   wobei $x = x(y)$ die nach x umgestellte Funktion $y = f(x)$ ist.

4. Volumen des Körpers, der bei Rotation der Fläche A_x zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse im Intervall $[a, b]$ entsteht
   Voraussetzung: $y = f(x)$ stetig in $[a, b]$

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

5. Volumen des Körpers, der bei Rotation der Fläche A_y zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der y-Achse im Intervall $[a, b]$ entsteht
Voraussetzung: $y = f(x)$ stetig und eineindeutig in $[a, b]$; $y_1 = f(a)$, $y_2 = f(b)$,

$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} [x(y)]^2 \, dy$$

bzw.

$$V_y = 2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f(x) dx$$

wobei $x = x(y)$ die nach x umgestellte Funktion $y = f(x)$ ist.

6. Länge der Kurve (des Bogens) f im Intervall $[a, b]$
Voraussetzung: f in den möglichen Darstellungen:
   (a) in expliziter Form $y = f(x)$ in $[a, b]$
   (b) in Parameterdarstellung $x = x(t), y = y(t)$ mit $t \in [t_1, t_2]$
   (c) in Polarkoordinaten $r = r(\varphi)$ mit $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$

$$s = \int ds = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi$$

7. Mantelfläche der Rotationskörper aus (4) und (5)
Voraussetzung: siehe (4) und (5)

$$A_M^x = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (y')^2} dx \qquad A_M^y = 2\pi \cdot \int_a^b x \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

8. Mittelwerte von Funktionen $y = f(x)$ im Intervall $[a, b]$
Voraussetzung: $y = f(x)$ stetig in $[a, b]$

linearer Mittelwert: $$\overline{y}_{lin} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

quadratischer Mittelwert: $$\overline{y}_{quadr} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx}$$

9. Statische Momente und Schwerpunkte
Voraussetzung: $y = f(x)$ stetig in $[a, b]$; A=Flächeninhalt, s=Bogenlänge, V=Volumen

Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_s, y_s)$: $$x_s = \frac{M_y}{A}, \; y_s = \frac{M_x}{A}$$

   (a) von ebenen Flächen:

statisches Moment bezüglich der x-Achse: $$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

statisches Moment bezüglich der y-Achse: $$M_y = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

(b) von ebenen Kurven:

statisches Moment bezüglich der x-Achse: $M_x = \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

statisches Moment bezüglich der y-Achse: $M_y = \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

(c) des Rotationsvolumens V_x:
wegen $y_s = z_s = 0$ folgt auch $M_{xy} = M_{xz} = 0$

statisches Moment bezüglich der y, z-Ebene: $M_{yz} = \pi \cdot \int_a^b x(f(x))^2 dx \Rightarrow x_s = \frac{M_{yz}}{V}$

10. Formeln zur numerischen Integration:
Voraussetzung: $I = \int_a^b f(x)dx$, f sei stetig in $[a, b]$
Es seien $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i \cdot h$, $x_n = b$, $y_i = f(x_i)$ für i=0, 1, ... , n (n vorgegeben).

(a) Sehnen-Trapezregel

$$I \approx ST = \frac{h}{2}(y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}))$$

(b) Simpson-Regel

$$I \approx S = \frac{h}{3}(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}))$$

wobei n durch 2 teilbar ist. Ist n durch 4 teilbar, so gilt für den Fehler

$$F_s = |S - I| \leq \frac{1}{15}|S - S^*|$$

wobei

$$S^* = \frac{2h}{3}(y_0 + y_n + 4(y_2 + y_6 + \ldots + y_{n-2}) + 2(y_4 + y_8 + \ldots + y_{n-4}))$$

2.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.2.1 allgemeine Vorgehensweise

allgemeine Form:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x) \quad \text{mit} \quad a_1(x) \neq 0$$

Lösungsreihenfolge:

1. Umstellen in *Normalform*:

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2.1}$$

wobei

$$p(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)} \quad \text{und} \quad q(x) = \frac{r(x)}{a_1(x)}$$

Die Gesamtlösung setzt sich aus der homogenen und der partikulären Lösung zusammen: $y_{ges} = y_h + y_p$.

2. Bestimmen von y_h
Zunächst Trennung der Variablan: $y' = p(x)y = 0$. Anschließend Umstellen und Auflösen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -p(x)y \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int p(x)dx \\ y_h &= ce^{-\int p(x)dx} \\ &= c \cdot \psi(x) \qquad (c \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

3. Bestimmung einer partikulären Lösung, Variation der Konstanten
Ansatz:

$$y_p = c(x) \cdot \psi(x) \tag{2.2}$$
$$y_p' = c'(x) \cdot \psi(x) + c(x) \cdot \psi'(x) \tag{2.3}$$

Die Formeln (2.2) und (2.3) müssen dann in die Gleichung (2.1) eingesetzt werden. Daraus ergibt sich

$$c(x) = \int \frac{q(x)}{\psi(x)}dx + c_1$$

Für die partikuläre Lösung kann man $c_1 = 0$ setzen und erhält damit das Ergebnis.

4. Zusammensetzen von homogener und partikulärer Lösung:

$$y_{ges} = y_h + y_p$$

2.2.2 Schritte zum Lösen einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

Ausgangsgleichung: $y' - xy + 2x = 0$

$y' - xy = -2x$	Umstellen in Normalform
$y' - xy = 0$	Lösung für homogene DG (y_h)
$y' = \frac{dy}{dx} = xy \curvearrowright \frac{dy}{y} = x \cdot dx \quad \Big\vert \int()$	durch Trennung der Variablen
$\ln\lvert y\rvert = \frac{1}{2}x^2 + c \quad \Big\vert e^{()}$	ermitteln
$y = ce^{\frac{1}{2}x^2}$	homogene Lösung
$y(x) = c(x) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$	Ansatz für partikuläre Lösung in der Form $y(x) = c(x) \cdot \psi(x)$

(*Anmerkung:* von hier aus könnte man schon $c'(x)$ ausrechnen, und zwar nach der Formel $c'(x) = \frac{q(x)}{\psi(c)}$. Im Beispiel wäre dann also $c'(x) = -2x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$.)

$$
\begin{aligned}
c'(x) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} + c(x) \cdot xe^{\frac{1}{2}x^2} &= y'(x) && y \text{ nach } x \text{ ableiten} \\
\underbrace{c'(x) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} + c(x) \cdot xe^{\frac{1}{2}x^2}}_{y'} - x \cdot \underbrace{c(x) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}}_{y} &= -2x && \text{einsetzen in Ausgangsgl.} \\
c'(x) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} &= -2x && \text{dadurch entfallen} \\
& && \text{ein paar Glieder} \\
c'(x) = -\frac{2x}{e^{\frac{1}{2}x^2}} &= -2x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \Big| \int () && \text{Umstellen nach } c'(x) \\
c(x) &= 2e^{-\frac{1}{2}x^2} + c^* && \text{und integrieren} \\
y(x) &= (2e^{-\frac{1}{2}x^2} + c^*) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} && \text{einsetzen in Ansatz} \\
y &= 2 + c^* e^{\frac{1}{2}x^2} && \text{und zusammenfassen}
\end{aligned}
$$

(*Anmerkung:* man kann auch $c^* = 0$ setzen und y_{gesamt} aus y_p und y_h zusammensetzen.)
Bei inhomogenen Differentialgleichungen wird erst die homogene Differentialgleichung gelöst, anschließend wird das Störglied betrachtet (Störgliedansatz / Variation der Konstanten).

2.3 Fourierreihenentwicklung

Voraussetzungen:

- $f(x)$ periodisch mit Periode T
- $f(x)$ in $[-T,T]$ stückweise stetig
- das Intervall $[-T,T]$ ist in endliche Anzahl von Teilintervallen zerlegbar, in deren Inneren $f(x)$ monoton ist
- $f(x)$ besitzt an den Unstetigkeitsstellen jeweil seinen linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert

Dann konvergiert die Fourierreihe von $f(x)$ für alle x mit der Summe $S(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$

Periode 2π	*Periode* T
$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$	$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\frac{2\pi}{T}x + b_n \sin n\frac{2\pi}{T}x)$
$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \phi_n)$	$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\frac{2\pi}{T}x + \phi_n)$
$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$	$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{2\pi}{T}x}$

Berechnung der Fourierkoeffizienten:

Periode 2π	*Periode* T
$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$	$a_0 = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$	$a_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\frac{2\pi}{T}xdx$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx$	$b_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin n\frac{2\pi}{T}xdx$

komplex:

$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$	$c_0 = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$
$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$	$c_n = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-in\frac{2\pi}{T}x}dx$

Umrechnungen:

$c_0 = \frac{a_0}{2} = A$	$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$	$c_{-n} = c_n^* = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$
$a_n = c_n + c_{-n}$	$b_n = i(c_n - c_{-n});\ n \geq 1$	$a_0 = 2c_0 = 2A_0$
$A_n = 2\sqrt{c_n c_{-n}} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$	$\phi_n = \arctan\frac{c_n + c_{-n}}{i(c_n - c_{-n})} = \arctan\frac{a_n}{b_n};\ n \geq 1$	

Sonderfälle:

1. $f(x)$ gerade periodische Funktion ($f(-x) = f(x)$)

Periode 2π	*Periode* T
$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$	$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)dx$
$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx$	$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\frac{2\pi}{T}xdx$
$b_n = 0$	$b_n = 0$

komplex:

$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$	$c_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)dx$
$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx$	$c_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\frac{2\pi}{T}xdx$

Umrechnungen:

$a_n = 2c_n\ \forall n$	$b_n = 0\ \forall n$

2. $f(x)$ ungerade periodische Funktion ($f(-x) = -f(x)$)

Periode 2π	*Periode* T
$a_0 = 0,\ a_n = 0$	$a_0 = 0,\ a_n = 0$
$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$	$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin n\frac{2\pi}{T}x dx$

komplex:

$c_0 = 0$	$c_0 = 0$
$c_n = \frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$	$c_n = \frac{-2i}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin n\frac{2\pi}{T}x dx$

Umrechnungen:

$$b_n = -\frac{2}{i}c_n\ \forall n \qquad a_n = 0\ \forall n$$

2.4 Grenzwerte

2.4.1 verschiedene Grenzwerte

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x} = 1$
$\lim_{n\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$	$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$
$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$	$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\log_a(1+x)} = \ln a$
$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)} = 1$
$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a; a>0$	$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^\mu)-1}{x} = \mu; \mu\in\mathbb{R}$
$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$	$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n} = 0; a>1$
$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0; a>1$	$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0; a>1$
$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$	$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$
$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^n = e^a$	

2.4.2 Auswertung unbestimmter Ausdrücke — l' Hospitalsche Regeln

- $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

  $$\text{wenn } \lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

  und die Ableitungen von $f(x)$ und $g(x)$ existieren, dann gilt:

  $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

- $0 \cdot \infty$

  $$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

  (Daraus entsteht wieder ein Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$.)

- $\infty - \infty$

  $$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{f(x)}}$$

- 0^0, ∞^0, 1^∞

  $$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} \Rightarrow \lim_{x\to a} \ln(f(x)^{g(x)}) = \lim_{x\to a} (g(x) \cdot \ln f(x)) = 0 \cdot \pm\infty \text{ bzw. } 0 \cdot \infty$$

2.5 Bernouillesche Ungleichung

$$(1+x)^n \leq 1 + nx \qquad \text{für } x > -1, n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

2.6 Mengenalgebra

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b} \qquad \overline{a \vee b} = \overline{a} \ \wedge \overline{b}$$

$$A \Leftrightarrow B \equiv A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A \equiv (p \vee \overline{q}) \wedge (\overline{p} \vee q)$$

$$A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$$

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r) \qquad p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$a \vee \emptyset = a \qquad a \wedge \emptyset = \emptyset$$

$$a \vee 1 = 1 \qquad a \wedge 1 = a$$

$$a \vee \overline{a} = 1 \qquad a \wedge \overline{a} = \emptyset$$

$$a \wedge a = a \qquad a \vee a = a$$

$$a \vee (a \wedge b) = a \qquad a \wedge (a \vee b) = a$$

$$a \vee \overline{a} \wedge b = a \vee b \qquad a \wedge (\overline{a} \vee b) = a \wedge b$$

$$p \Rightarrow (p \vee q) = 1 \qquad p \wedge (\overline{p} \wedge q) = \emptyset$$

Kapitel 3

Wahrscheinlichkeitsrechnung

$(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ... Wahrscheinlichkeitsraum

3.1 Additionssatz

$A,B,C \in \mathfrak{A}$ seien beliebige Ereignisse. Es gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Wenn A und B disjunkt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Für drei Ereignisse A,B und C:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

3.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses $A(B)$, wenn $B(A)$ bereits eingetreten ist.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{analog: } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

3.3 Multiplikationssatz

Umstellen der Formeln aus (3.2):

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Für drei Ereignisse:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

Allgemein gilt:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2 \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Zwei Ereignisse heißen *unabhängig*, wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

3.4 Totale Wahrscheinlichkeit

$\{B_1, B_2 \dots B_n\}$ sei ein vollständiges System unvereinbarer Ereignisse, d.h. $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$. Dann gilt für jedes Ereignis $A \in \mathfrak{A}$:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P(A|B_k)$$

3.5 Formel von Bayes

Voraussetzung siehe (3.4).

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cdot P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i \cdot P(A|B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P(A|B_k)}$$

Kapitel 4

Wirtschaftsmathematik

Variable	Beschreibung
a	Sättigungsgrenze
c_0	Existenzminimum
c_1	marginale Konsumquote
p	(Verkaufs-)Preis eines Gutes (in $\frac{GE}{ME}$)
p^*	Preisniveau-Änderung
r	(effizienter) Faktor-Input einer Produktion (in ME)
x	nachgefragte (abgesetzte) Menge des Gutes (in ME) in der Bezugsperiode
A	angebotene Menge des Gutes (in ME) in der Bezugsperiode; Arbeitslosenquote (Phillips-Kurve)
B	Bestand (z.B. Bevölkerung, Steuereinnahmen etc.)
C	gesamtwirtschaftliche Ausgaben für Konsumgüter
$E = U$	wertmäßiger Umsatz (Erlös) in GE pro Rechnungsperiode
G	Betriebsgewinn (in GE)
K	Gesamtkosten (in GE)
Y	Volkseinkommen (Sozialprodukt)

Tabelle 4.1: verwendete Variablenbezeichner

- Nachfragefunktion

$$x = x(p) \quad \text{oder} \quad p = p(x)$$

- Angebotsfunktion

$$A = A(p) \quad \text{oder aggregiert: } \sum_{i=1}^{n} A_i(p)$$

  $A_i(p)$ ... indiv. Angebotsfunktionen bei vorgegebenem Preisniveau p

- Erlös-, Umsatzfunktion

$$E(x) = U(x) = x \cdot p(x) \quad \text{oder } E(p) = U(p) = x(p) \cdot p$$

- Grenzerlös

1. bezüglich der Menge: $E'(x) = xp'(x) + p$
2. bezüglich des Preises: $\frac{dE}{dp} = x(p) + p\frac{dx}{dp}$

- Produktions-, Ertragsfunktion

$$x = x(r)$$

Beispiele:

1. ertragsgesetzliche Produktionsfunktion: $x(r) = -r^3 + 12r^2 + 60r$
2. neoklassische Produktionsfunktion (Cobb-Douglas):

$$x(r) = 0,7r^{0,5} = 0,7\sqrt{r}$$

3. neoklassische Produktionsfunktion (CES):

$$x(r) = (r^{-0,5} + 0,5)^{-2} = \frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{2})^2}$$

- Kostenfunktion

$$K = K(x) = K_v(x) + K_f = p_r r(x)$$

z. B. $K_S(x) = \frac{K(x)}{x}$ ... Stückkosten

- Grenzkostenfunktion

$$K'(x) = K'_v(x)$$

- Grenzstückkostenfunktion

$$K'_S = \frac{xK'_v - (K_v + K_f)}{x^2} = \frac{K'_v}{x} - \frac{K_S}{x}$$

- Gewinnfunktion

$$G = G(x) = E(x) - K(x) = xp(x) - K(x) = p_x x(r) - K(x)$$

- Grenzgewinn

$$G'(x) = E'(x) - K'(x) = p + xp'(x) - K'_v(x)$$

- Stückgewinnfunktion

$$G_S(x) = \frac{G(x)}{x} = \frac{E(x) - K(x)}{x} = p(x) - K_S(x)$$

Ermittlung des *Deckungsbeitrages*: $G_D(x) = E(x) - K_v(x)$

- Konsumfunktion

$$C = C(Y) \Rightarrow \text{Sparfunktion: } S(Y) = Y - C(Y)$$
$$C(Y) = c_0 + c_1 Y$$

- logistisches Wachstum

$$B = B(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}}$$

- Durchschnittsertrag

$$\overline{x}(r) = \frac{x(r)}{r}$$

- marginale Konsumquote

$$\frac{dC}{dY} = 1 - S'(Y) = c_1$$

- marginale Sparquote

$$\frac{dS}{dY} = 1 - C'(Y)$$

- Marktpreis: $A(p_m) = N(p_m)$

4.1 Elastizitäten

- Elastizität (allgemein)

$$\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}x$$

- partielle Elastizität von z bezüglich x

$$\varepsilon_{f_x}(x,y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f(x,y)} \qquad , z \text{ in } D_f \subset \mathbb{R}^2 \text{ definiert und differenzierbar}$$

- Kreuzpreiselastizität

$$\varepsilon_{N_{1_{f_1}}}(p_1,p_2) = \frac{\frac{\partial N_1}{\partial N_2}}{N_1(p_1,p_2)}p_2$$

4.2 Extremwerte für mehrdimensionale Funktionen

- notwendige Bedingung: $z_x = 0$, $z_y = 0$
- hinreichende Bedingung:

$$\Delta_E = [f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2]_{(x_E,y_E)} > 0$$

$$f_{xx} > 0 \curvearrowright \text{ Minimum, } f_{xx} < 0 \curvearrowright \text{ Maximum}$$

$$\Delta_E < 0 \curvearrowright \text{ Sattelpunkt, } \Delta_E = 0 \curvearrowright \text{ keine Aussage möglich}$$

4.3 Anwendungen der Integralrechnung

- diskreter Gesamtumsatz:

$$U_{ges}^{diskret} = \sum_{i=0}^{n-1}(p_0 - i\Delta p) \cdot [N(p_0 - i\Delta p) - N(p_0 - (i-1)\Delta p)] + p_0 \cdot N(p_0)$$

- stetiger Gesamtumsatz:

$$U_{ges}^{stetig} = p_{min} \cdot N(p_{min}) + \int_{p_{min}}^{p_0} N(p)dp$$

- Konsumentenrente

$$R_K = \int_{p_m}^{p_{oben}} N(p)dp$$

- Produzentenrente

$$R_P = \int_{p_{min}}^{p_m} A(p)dp$$

4.4 wichtige Funktionen des TI-89

- *nCr*(<term1>,<term2>)
  Binomialkoeffizient
- *nPr*(<term1>,<term2>)
  Anzahl der Möglichkeiten, *term1* Elemente unter Berücksichtigung der Reihenfolge aus *term1* Elementen auszuwählen
- *stdDev*(<liste>)
  Standardabweichung (liste:= { <el1>,<el2>, ... })
- *variance*(<liste>)
  Varianz